

TR-HA-023:
Electro Magnetica Numerica による
Dielectric Sphere の共鳴解析

Hiroshi ABE
Three Wells

平成 25 年 9 月 3 日 (火)

目次

1	目的	1
2	計算モデル	2
2.1	モデル	2
2.2	入力信号	2
2.3	計算環境	3
3	解析解	3
4	計算格子	5
5	結果	5
5.1	計算速度	6
5.2	計算メモリ	6
5.3	$\epsilon = 40.0$ のケース	7
6	まとめ	7

概要

1 目的

Three Wells 開発の Electro-Magnetica[1](以降 EM) の計算精度や必要とされる計算リソースを評価するために誘電体球の共鳴現象の解析を行い、解析解や従来の FDTD との比較を行った結果を報告する。

2 計算モデル

2.1 モデル

モデルは、計算領域 (1.0, 1.0, 1.0) メートル内部の中央に配置した、半径 0.1 メートルの誘電体球に、z 軸方向に入射された平面波により励起された共鳴波の周波数を解析解と比較する。その際、計算メッシュを変更して解の収束の様子を評価する。

モデルと計算領域を示した三次元鳥瞰図を図 1 に示す。

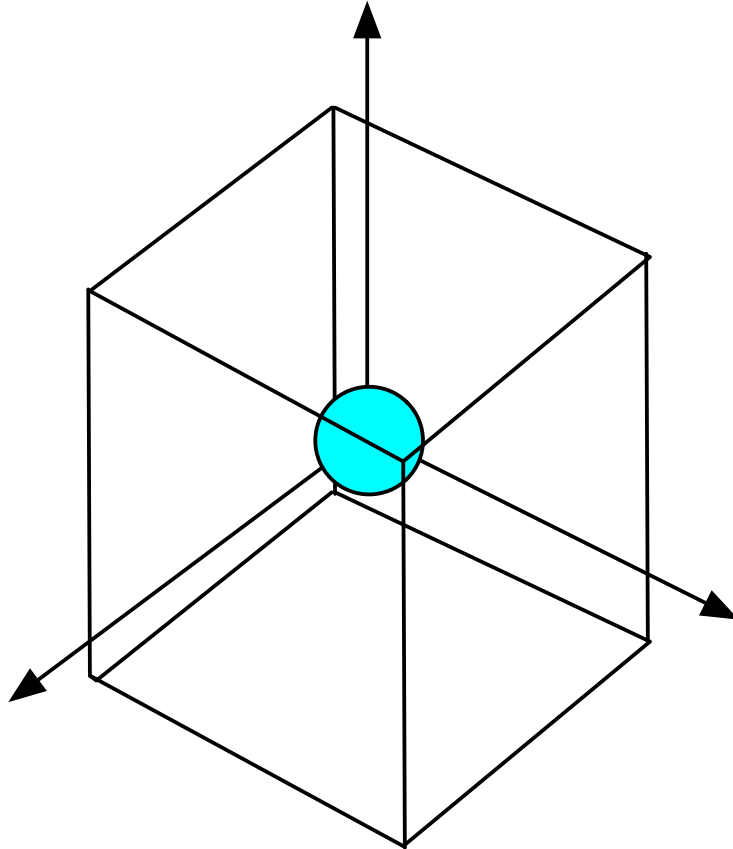


図 1: モデル

2.2 入力信号

入射する平面波は、計算領域の端面から Total-Field / Scattered-Field Technique[3] によって励起させた。入力された平面波の時間変化は以下の通り。

$$\vec{E} = (0, 1, 0) \exp\left(\frac{(t-t_0)^2}{2\Delta t^2}\right) \cos \omega_0(t-t_0), \quad (1)$$

で、周波数領域で中心周波数 f_0 が 1.0GHz で、半値幅 $\Delta\omega$ が 1.0GHz となるように設定した。つまり、

$$\Delta t = \frac{2\sqrt{2 \ln 2}}{\Delta\omega},$$

とした。実際に入力された波形は図 2 の通りである。

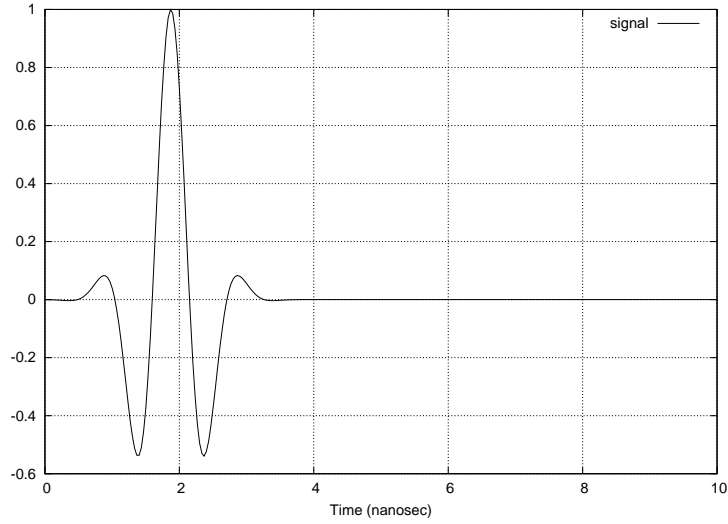


図 2: 信号の時間変化

2.3 計算環境

計算は、Intel Core i7 3.4GHz (4 コア), 8GByte Main Memory, OpenSUSE12.1 を用いて計算した。また、EM は標準でマルチスレッドに対応しており、全てのコアを利用した計算を行った。

3 解析解

解析解は、Gastine ら [2] の導出した式を元に Octave を用いて数値解を求めた。Gastine らの導出した式は、 TE_{nmr} モードに関して、

$$\frac{J_{n-1/2}(ka)}{J_{n+1/2}(ka)} = \frac{H_{n-1/2}^{(2)}(ka/\sqrt{\varepsilon})}{\sqrt{\varepsilon}H_{n+1/2}^{(2)}(ka/\sqrt{\varepsilon})} \quad (2)$$

である。また、 TM_{nmr} モードに関して、

$$\frac{n}{ka} - \frac{J_{n-1/2}(ka)}{J_{n+1/2}(ka)} = \frac{n\varepsilon}{ka} - \sqrt{\varepsilon} \frac{H_{n-1/2}^{(2)}(\frac{ka}{\sqrt{\varepsilon}})}{H_{n+1/2}^{(2)}(\frac{ka}{\sqrt{\varepsilon}})}. \quad (3)$$

ただし、 $J_{n+1/2}$ は第一種ベッセル関数、 $H^{(2)}$ は第二種ハンケル関数であり、誘電体球の半径を a 、比誘電率を ε とする。また、 k は動径方向の波数である。与えられた n に対して、式 (2),(3) を満たす ka が共鳴の固有解となる。

これらの式の解を Octave を用いて Newton-Raphson 法によって求解したのが表 2, ??である。

n	Hz
1	2.3161×10^8
2	3.3481×10^8
3	4.3117×10^8
4	5.2364×10^8

表 1: TE_{nm1} モードでの共鳴周波数。m に関しては縮退している。r に関しては基本モードのみ求めている。

n	Hz
1	3.2638×10^8
2	4.2721×10^8
3	5.2086×10^8
4	6.1140×10^8

表 2: TM_{nm1} モードでの共鳴周波数。m に関しては縮退している。r に関しては基本モードのみ求めている。

4 計算格子

Blocked Adaptive Cartesian Grid Method を用いている EM は必要な領域のセルを局所的に細分化していく。今回のモデルの場合、計算領域中央に配置された誘電体球の周りでセルは細分化されていく。EM では、細分化の上限と下限をパラメータ Level で指定する。ブロックセルは一辺の長さが $L/2^{Level}$ まで細分化される。ブロックセルの内部には、 $8 \times 8 \times 8 = 64$ 個のセルが含まれている。ここで L は計算領域の一辺の長さを示す。

Level の下限を 3 に固定し上限を変えた場合のブロックセルの実際の様子を図 3 に示す。ある

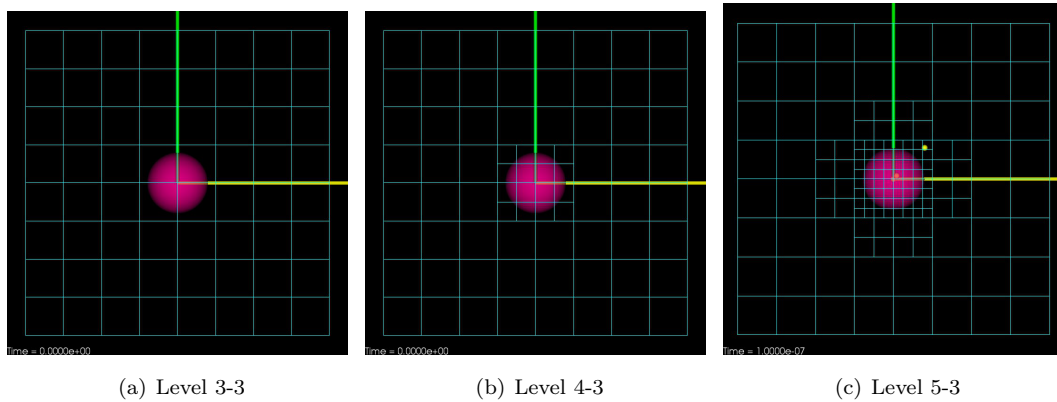


図 3: 各 Level での計算格子の様子

Level を設定し自動的に生成されたブロック格子。各々のブロック格子には $(8 \times 8 \times 8 = 64)$ のセルが含まれている。

Level で細分化された計算格子 δx は以下の式で表される。

$$\delta x = L / (8 \cdot 2^{Level}).$$

今回のモデルケースにおける最小（誘電体球付近）の計算格子幅は表 3 の通りである。

Level	δx (meter)
3-3	1.5625×10^{-2}
4-3	7.8124×10^{-3}
5-3	3.9063×10^{-3}

表 3: 各レベルでの最小の格子幅

5 結果

本章ではモデルに対し、計算格子を変えた計算結果を比較することにより、その精度や収束性を検証する。

検証のためにモデル座標 (0.01, 0.01, 0.01) における電場の時間変化を出力しておき、その内、y 方向成分の時系列について Fast Fourier Transform (FFT) を処置し、周波数領域のデータを得た。FFT の際、Hanning 窓関数を時系列データに処理してから行った。

図 4 は、計算途中の電場の様子を y-z 平面で表示したものである。

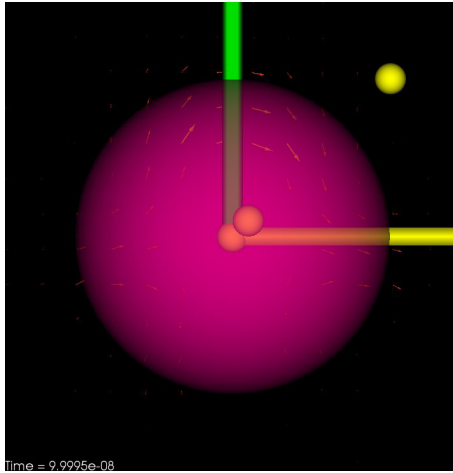


図 4: 計算途中の電場分布

5.1 計算速度

計算は、Linux OpenSUSE 12.1 のマルチユーザ環境で行った。他のユーザプロセスはほとんど無い状態で計算するように心がけた。

EM の Blocked Adaptive Catesian Cell 法は非構造格子であるため、格子を細分化しても局所的であるため、一般的な構造格子法より計算量の増大が抑えられることが知られている [1]。図 5 に示された結果も、計算格子の細分化に対して、冪乗ではない増加傾向を示している。

5.2 計算メモリ

表 4 に各モデルケースにおける、用いられたメモリの大きさを示す。Level5-3 の格子幅は、等間隔構造格子における 256 グリッドに相当するため、かなりメモリが節約されていることになる。

Level	Memory (MB)
3-3	25.4
4-3	31.0
5-3	64.1

表 4: 各レベルにおける、確保されたメモリの大きさ

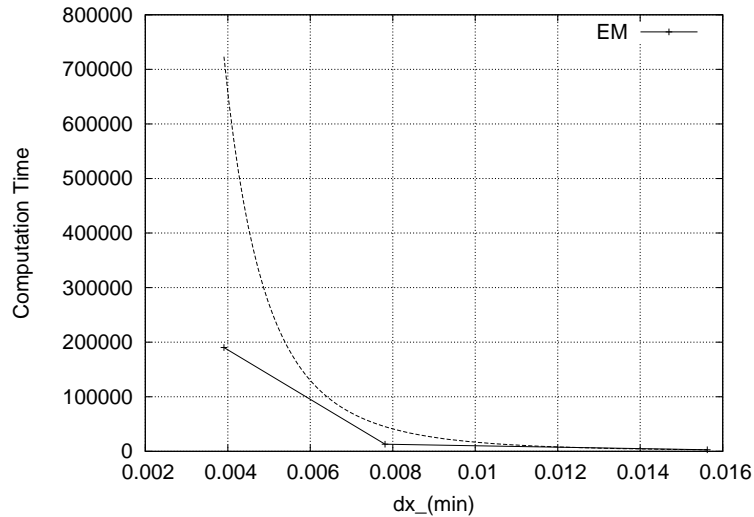


図 5: 最小の格子幅と計算時間

最小の格子幅に対する、 $\text{Time} = 1.0 \times 10^{-6}$ (sec.) のシミュレーションに要した時間。点線は、Level3-3 相当の格子に対してかかった時間から一般的な FDTD 法による計算量の増大 ($\propto N^4$) を仮定して外挿したもの。

5.3 $\epsilon = 40.0$ のケース

本節では、誘電体球の比誘電率が 40 の場合の計算結果を述べる。Level の下限を 3 に固定し、上限を 3 から 5 に変化させたときの計算解を比較する。

図 6 に、周波数帯域全体での特性を示す。図中に TE_{nmr} モードの共鳴の位置を縦の実線で示している。

図 7(b) において、この励起されているモードは TM_{1m1} モードの周波数であることが確認されている。図中にある $n=2$ の直線は TM_{1m1} モードの周波数を示している。

今回行った全てのケースにおいて、最もメッシュの細かい Level5-3 の結果が解析解と最も近い値を示している。

6 まとめ

Blocked Adaptive Catesian Grid Method を実装した電磁場シミュレータ Electro Magnetica Numerica は、

1. 計算規模の増大に対して、メモリ効率が低い。
2. 計算規模の増大に対して、計算コストが低い。
3. 誘電体球の共鳴現象に対して、正しい結果を与えている。
4. メッシュを細かくする (Level を上げる) ことにより解析解へ収束している。

という事が確認された。

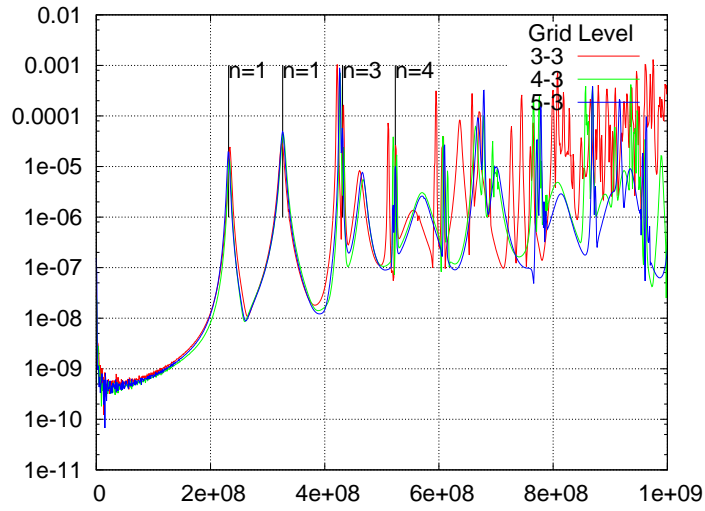
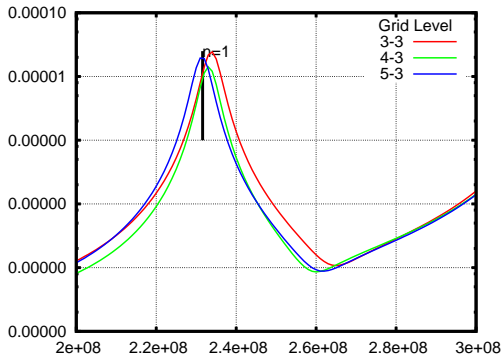
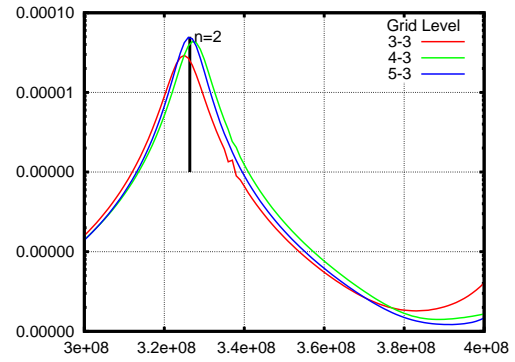


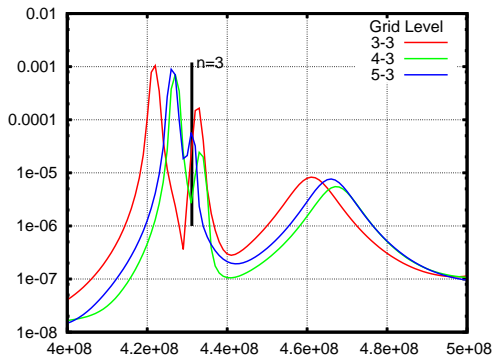
図 6: 計算結果と TE_{nm1} モード
添え字 m に関しては解は影響を受けない (縮退している)。



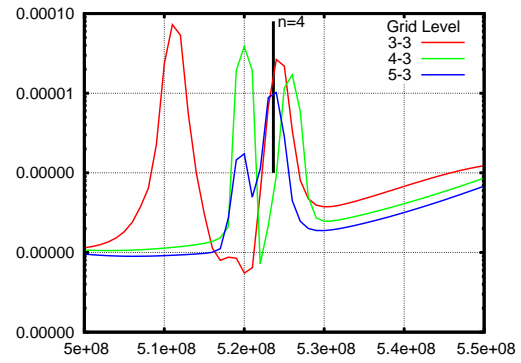
(a) TE_{1m1}



(b) TM_{1m1}



(c) TE_{3m1}



(d) TE_{4m1}

図 7: 解析解と計算解との比較
図 7(b) でピークを示しているのは TM_{1m1} モードである。

参考文献

- [1] Hiroshi Abe. Blocked adaptive cartesian grid fd-td method for electromagnetic field with complex geometries. In *International Conference on Modeling and Simulation Technology*. Japan Society for Simulation Technology, 2011.
- [2] Monique Gastine, Louis Courtois, and Jean Louis Dormann. Electromagnetic resonances of free dielectric spheres. *IEEE trans. on Microwave Theory and Tech.*, Vol. 15, pp. 694–700, 1967.
- [3] A. Taflove and S. Hagness. *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method, 3 ed.* Artech House, Boston, MA, 2005.

COPYRIGHTS - 2013, All Right Reserved by 阿部博史 (Three Wells)