

Maxwell 方程式から見た回路電流

阿部 博史

2006 年 5 月 26 日 金曜日

目次

1	この冊子の目的	1
2	はじめの疑問点	2
3	Maxwell 方程式とエネルギー移送	3
4	電磁場と導体内部の電子	5
4.1	完全導体におけるうず電流の理解	5
4.2	金属の場合	6
5	導線がペア構造である必要性について	8
6	電力の式と Poynting 束	9
7	まとめ	10

1 この冊子の目的

筆者は学生時代は宇宙空間プラズマ物理学専攻で、電磁流体数値シミュレータを開発し、それを用いて研究していた。20年前の事なので、当然最先端の計算機環境が必要となり、ありがたい事に師事する先生にその環境を与えられ十分な研究をすることができた。その関係でスーパーコンピュータを開発する会社に就職し、しばらく数値解析の研究を行っていた。

あるとき、電磁気学の専門家が必要だとの事で電気回路のグループに配属することになった。20名ほどのメンバーの内、私以外のメンバーはLSIの論理設計者が数人で他はプリントボードの不要電磁放射対策の研究者たちで、回路設計の専門家がほとんどであった。高校以来初めて電圧だとかインダクタンスなどの概念に触れる事になったのだが、そのときに理解できなかったのが、高周波の電磁波が研究対象なのに電流主体で考えるやり方であった。

学生時代や就職後のマイクロ波デバイス解析の経験からの直感では理解できない様々の事が当たり前のように語られるのだが、当初、筆者には何が違和感を感じさせるのかわからなかった。プラズマ波動のモード変換の研究が専門の先生に教わったため、波動中心で考える自分と見方が違うだけかとも思っていた。特に違和感を感じたのはコモンモード電流とか、電荷を如何に速くLSIに供給できるか、とかいう表現などであった。「電荷」を「エネルギー」に置き換えると大半は意味が通じたが、それでも理解できないものもあった。

何年か経ち、身近の人たちだけでなく、広く回路研究者全般が電磁気学に不慣れなため、様々な点で間違っ理解している事がわかってきた。勘違いしているため、不要な電磁波が発生するのが当たり前構造なのに平気で使って後で悩んでいたりするのだ。

例えば、ビア構造である。ビア構造のうち多層基盤で複数の平面層をまたがって貫通するビア構造で、配線がペアではなくシングルで行われている状況はどう考えてもおかしかった。この冊子の後の方で明らかとなっていくが、電磁波を局所的に封じ込めたまま伝播させるにはペア配線でないと難しいためである。笑い話では無いが、ビアが同軸もしくはペアの構造ではなく単独の配線だと知ったのはビア構造に関する特許を書き出してからだった。とは言うものの、最近ではマイクロ波方面の研究者によってペア構造を持つビアも提案され始めている。

この冊子は、回路技術者で1GHz以上の高周波ノイズの対策を必要とされている方々に向けて書かれたものだ。しかし、ここに書かれた事を理解し実践したからといって、ノイズを根絶できると太鼓判を押す事は難しい。というのも実際のボード上での配線の密度の高さは並大抵ではなく、私の毛嫌いするビア構造無しには設計は成り立たないからだ。しかし、ノイズの発生の根本的なメカニズムがわかれば、対策に要する時間も短くなるのではないだろうか。

私自身はこの電気回路のグループでの研究からは既に離れてしまったが、コンピュータの高速化の恩恵は最前線で受けていると認識している。その高速コンピュータを開発する方々の一助となればという思いでこの冊子を書こうと思い立った。

この冊子はまずおなじみの Ohm の式と導線についての物理的なイメージについて不確かな部分を指摘し、その点について、Maxwell 方程式からその物理的イメージを作り上げていく。また、回路理論で出てくる方程式が正しい事はわかっているが、どのような仮定のもとで Maxwell 方程式から導きだされるのかについて議論していく。

2 はじめの疑問点

$$\text{電圧 } (V) = \text{電流 } (I) \times \text{抵抗 } (R). \quad (1)$$

これは、小学校の理科の授業で最初に教えられる電磁気に関する方程式、オームの方程式である。この式を教わる際、図1のように豆電球と電池が電線でつながった回路が説明され、電池の正極から電流が電線を伝わり、豆電球を点灯させた後、再度電線を伝わり負極へ戻ると説明される。

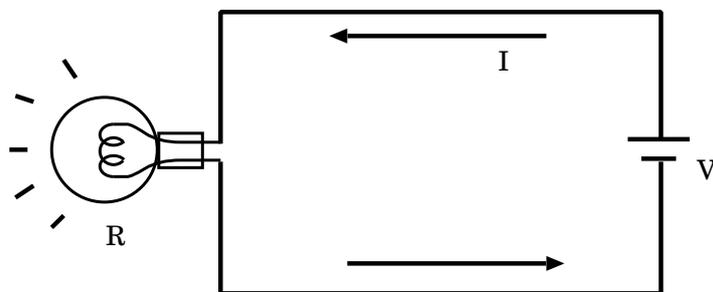


図 1: 電池につながった豆電球の回路

このときイメージとして記憶に刻まれるのは、電流が電気エネルギーを電線上を陽極から運び、豆電球を点灯させ、また負極側の電線を伝わって電池の負極へと戻っていくというものである。こ

こでの物理的イメージは、負極から電位によって加速され引き出された電子が電線の中を走り、途中豆電球でエネルギーを失いながら正極へと戻っていくというものであろう。

しかしここにひとつの疑問がある。

電池に蓄えられた電気エネルギーは豆電球で Ohm 損失し、熱エネルギーへと変換されるが、電磁エネルギーはどのようにして豆電球まで運ばれるのであろうか。

それは電流であるという答えを多くの人の脳裏に浮かんだかもしれない。しかし、結論を急ぐ前に立ち止まってよく考えてみよう。電流の実態とは電子などの荷電粒子が一方へと流れているものであり、電子のような質量のある物体の運動は運動方程式によって支配されている。つまり電流は電磁エネルギーとは別の運動エネルギーを持ち、この電流自身が持っているのは運動エネルギーであるという事である。

一方、電池が持っているのは電磁エネルギーである。

図 1 に示されるような回路において、電池が保持しているのは電磁エネルギー、また豆電球で消費されるのはオームの式で表されるように電場で加速された電子が金属原子によって散乱され熱化されて現れる熱エネルギーである。

では、電池と豆電球の間でエネルギーを伝えるものは果たして電子／運動エネルギーなのか場／電磁エネルギーなのか。次章で Maxwell 方程式から調べる事にする。

3 Maxwell 方程式とエネルギー移送

電磁気現象を支配する方程式は、Maxwell によって 4 つの基本方程式にまとめられた。以後この方程式は書き換えられる事無く基礎方程式として信頼されている。すべての電磁現象はこの方程式を基本として理解できるはずである。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} &= \nabla \times \mathbf{H}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0,\end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E}, \\ \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H}.\end{aligned}$$

ここで、 ϵ_0, μ_0 はそれぞれ真空の誘電率、透磁率と呼ばれる場に固有の値である。

この方程式群が Maxwell 方程式と呼ばれるものである。これらの方程式は、原子と電子間に働く電磁力にも、太陽系空間に広がるプラズマと太陽磁場との電磁的相互作用にも用いられる基礎的な方程式である。ここで注意が必要なのは、あたかも意味のあるかのごとく式の中に現れている誘電率と透磁率であるが、これらの定数は物理量の単位系をかえることにより消し去ることのできるもので、場固有の値であり光速度一定の原理を示すものである。

電磁場と物質を構成する原子や電子の相互作用をこの Maxwell の方程式から解けば厳密な解が得られる訳だが、実際そのようなことは複雑すぎて解くことができない。

一方、電磁場と物質との相互作用を ϵ, μ, σ などのマクロ量を導入することにより、電磁気的な受動物質、つまり誘電体や磁性体を簡単に組み込むことができることが確認されている。この誘電率などのマクロ量を含めた方程式をマクロスコピックな Maxwell 方程式と呼ぶ。マクロパラメータとして、比誘電率 (ϵ^*)、磁化率 (χ^*)、導電率 (σ) などを導入すると、

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \epsilon_0(1 + \epsilon^*)\mathbf{E}, \\ \mathbf{B} &= \mu_0(1 + \chi^*)\mathbf{H}, \\ \mathbf{J}_e &= \sigma\mathbf{E},\end{aligned}\tag{2}$$

が得られる。これらのマクロパラメータは、外界から電磁場を印加されたときその物質が存在することによりどのような電磁的变化を起こすかを表したものである。これらの変化は外部からの電磁場がない場合は単独には存在しない。すなわち、例えば Ohm 電流が存在することによって電場が新たに生成される事は無い。

この Macroscopic Maxwell 方程式群を用いて、電磁エネルギー保存則を導きだすことができる [2]。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int w d^3x + \oint \mathbf{S} \cdot \mathbf{nd}S = - \int d^3x \mathbf{J} \cdot \mathbf{E},\tag{3}$$

ただし、

$$w = \int_0^{\mathbf{D}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} + \int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B},\tag{4}$$

で、これは体積領域中の電磁エネルギーを表している。また、 \mathbf{S} は Poynting 束と呼ばれるベクトル場で、

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H},\tag{5}$$

で定義される。これは体積領域に単位時間あたりに入り込んでくる電磁エネルギー量を示している。つまり、エネルギーの流れを表している。

式 (3) に Ohm の式を代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \int w d^3x + \oint \mathbf{S} \cdot \mathbf{nd}S = - \int d^3x \frac{\mathbf{J}^2}{\sigma},\tag{6}$$

となる。

この式の意味は、ある領域内の電磁エネルギーの時間変化は、そこに流れ込んでくるポインティング束の収支と、ジュール熱としての損失の総和に等しいということである。

さて、導体内部の電子の運動を含めた議論をするためには、今導出した電磁エネルギーのみの式では片手落ちである。電子の運動には、ランダムな運動、つまり熱エネルギーと、ある方向に全体として運動する運動エネルギーに分けられる。つまり、電子の運動と電磁気を含めた一つの系を議論するためには、これらすべてを網羅しなければならない。

図 2 は今考えている系でのエネルギーの変換関係図である。この図は電磁流体力学を構成する 3 つのエネルギーの相関図で、電磁エネルギー (原本 [1] には磁気エネルギーのみ)、熱エネルギー、運動エネルギーがどのように相互に変換されるかを示している。楕円で示されているのがエネルギーで、円の上下に書かれているのがエネルギー移送ベクトルを示している。電磁エネルギーでは Poynting ベクトルが移送項であり、他のエネルギーでは、流体そのものによって移送されている事が示されている。楕円を結ぶ破線はエネルギーの変換を示し、矢じりが片方しか無いものはエネルギー変換は一方方向のみ、両側にあるものは相方向に変換される。

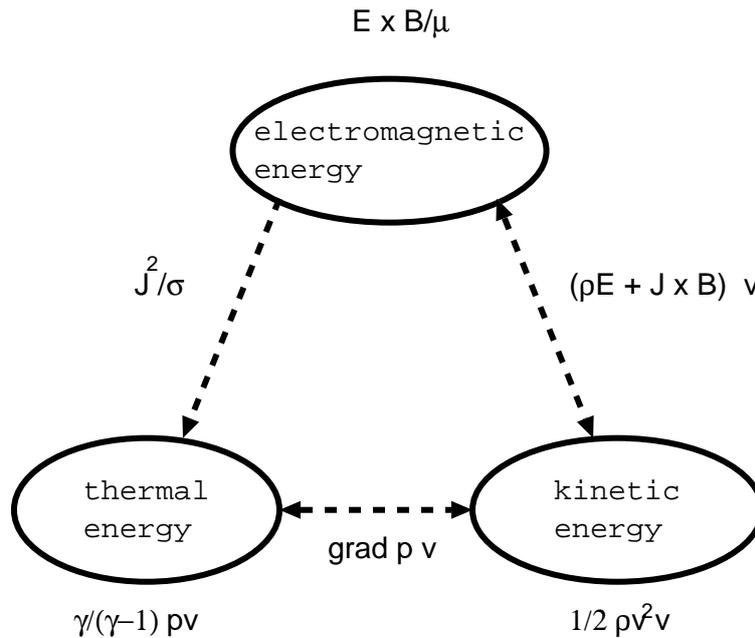


図 2: 電磁エネルギーと熱エネルギーと運動エネルギーの変換関係図

E, B, J, p, v はそれぞれ、電場、磁束密度、電流密度、圧力、電子の速度を表し、 γ, σ はそれぞれ比熱比、導電率を示す。

この図によって、Ohm 損失により電磁エネルギーが熱エネルギーに変換すること、電磁エネルギーから電場による加速/発電により運動エネルギーと交換すること、がわかる。また、熱エネルギーの不均一による圧力勾配により、電子が加速されて運動エネルギーに変換する事もわかる。

さて、これらの電磁 W_{EM} 、熱 W_T 、運動エネルギー W_K 密度は次式で与えられる。

$$W_T = \frac{P}{\gamma - 1}, \quad (7)$$

$$W_K = \frac{1}{2} \rho v^2. \quad (8)$$

電磁エネルギーは既に式 (4) で与えられている。これで、回路を取り巻くエネルギーのやり取りについての基礎的な方程式がすべてそろったわけである。次章からは、これらを用いて具体的な値を用いて、その実態を明らかにして行く。

4 電磁場と導体内部の電子

4.1 完全導体におけるうず電流の理解

完全導体内部には電場は浸透する事ができないため、その内部での電場は零である。そのため完全導体内部では Ohm 電流は流れない。しかしながら、その表面にのみ電流は存在し、うず電流 (Eddy Current) と呼ばれている。この電流は完全導体に入り込もうとする外部電場を打ち消す電場を生成するために完全導体表面上の電荷密度が変化するために起きる見かけの電流である。金属

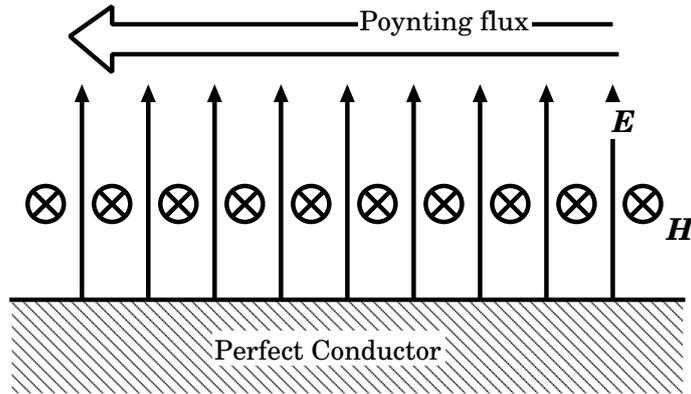


図 3: 完全導体の電磁場ベクトルの構造と Poynting ベクトルの方向関係

の場合、電荷密度の実態は現実には電子であるが、完全導体の場合には電子の質量を零にした極限状態であり、電場の変化に時間的な遅延無く追従する。

図 3 に導体表面を伝播する電磁波の様子を示す。完全導体表面では電場がその表面の法線方向成分のみ持つ。また磁場は接線方向成分のみ持つ。Poynting ベクトルは電場と磁場の外積で与えられる。これらの事から Poynting ベクトルは導線に沿う方向に向いている事がわかる。つまり電磁エネルギーは導線に沿う方向に流れていく事がわかった。

それでは、他のエネルギー、熱と運動エネルギーについて考察してみる。完全導体では抵抗率が零であるため、電磁エネルギーは熱化されない。また、完全導体では導体内部では電場が存在しないため、加速も起きないので運動エネルギーも存在しないことになる。つまり、完全導体という極限下では電磁エネルギー以外は存在しないという結論が導きだされる。もちろん実際の導体には有限の抵抗が存在するが、数 GHz に達するような非常に高周波である等のように導線の抵抗が問題となる場合を除き、この結論をそのまま実際の導体系に持ち込んでも正しいと言える。しかし、結論を急ぐ前に実際の金属の場合について次節で考察する事にする。

4.2 金属の場合

完全導体ではなく、実際の金属、例えば銅やアルミニウムなどではどのような理解になるのかをここでは述べる。図 4 に導体の抵抗が零ではない場合での概略を示す。抵抗が存在するため、導体内部にも電磁場が侵入し、導体上にも電場が存在する事により電子が加速される。またそれに伴い、Ohm 損失によって熱化される。つまり、電磁エネルギーだけでなく、その他のエネルギーも存在することになる。ここでは、これらのエネルギー値を比較する事でどのエネルギーが優位なのかを考察する。

銅について考察する。

銅内部の電子の運動方程式は以下で与えられる。

$$\frac{d \langle v \rangle}{dt} = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E} - \frac{\langle v \rangle}{\tau}, \quad (9)$$

ここで、 $\langle v \rangle$ は電子の平均速度、 e, m_e, τ はそれぞれ電気素量、電子質量、緩和時間である。緩和時間とは粒子の散乱に関する物理量で、原子によって散乱を受けるため、電場で加速された電子が止まってしまう現象を運動方程式に組み込むためのものである。

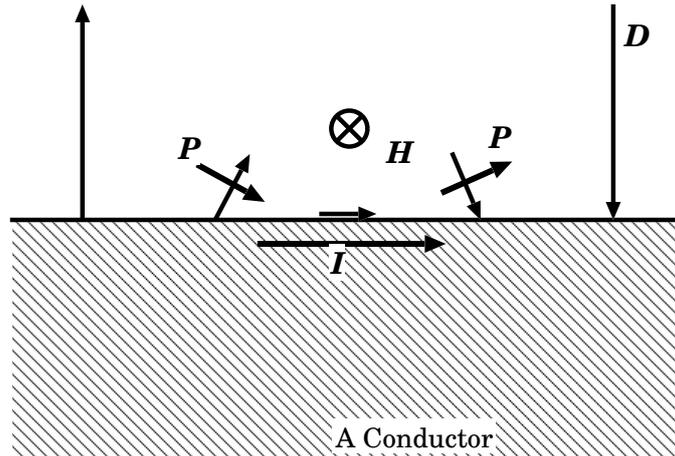


図 4: 導体の抵抗が零ではない場合での電磁場と電流。Poynting ベクトルが導体内部へ向かっている事がわかる。

有限の導電率によって電場や磁場が導体内部に拡散しており、それによって電場ベクトルがゆがみ、その結果、Poynting ベクトルが導体内部方向に向かい、そのエネルギーの一部が熱化されている事がわかる。

現象的に平衡状態にあるとき時間変化は無いから、

$$\frac{d \langle v \rangle}{dt} = 0, \quad (10)$$

故に、

$$\langle v \rangle = -\frac{e}{m_e} \tau \mathbf{E}. \quad (11)$$

これらから電流と電場の関係式を得る。

$$\mathbf{J} = \frac{n_e e \tau}{m_e} \mathbf{E}, \quad (12)$$

ただし、 n_e は電子の数密度で、銅の場合おおよそ 8.5×10^{28} である。

ここで、銅の場合、

$$\eta_{Cu} = 1.72 \times 10^{-8} (\Omega m), \quad (13)$$

であるから、

$$\langle v \rangle = 6.9 \times 10^{-4} \mathbf{E} (m/s), \quad (14)$$

となる。直径 0.5mm 長さ 10cm の銅線の両端に 1 V の電圧を印加したとする。そのときの導線内部の電子の運ぶエネルギー P_K は、

$$\langle v \rangle = 6.9 \times 10^{-4} \frac{1}{0.1} = 6.9 \times 10^{-3} (m/sec),$$

と、

$$\rho_e = m_e n_e = (9.1 \times 10^{-31}) \cdot (8.5 \times 10^{28}) = 7.7 \times 10^{-2} (m^{-3}),$$

より、

$$P_K = \int \frac{1}{2} \rho_e v^2 v dS, \quad (15)$$

$$= \pi (0.5 \times 10^{-3})^2 \frac{1}{2} (7.7 \times 10^{-2}) \langle v \rangle^3, \quad (16)$$

$$= 9.9 \times 10^{-15} (\text{Watt}), \quad (17)$$

となる。

一方、電磁エネルギー量 P_{EM} は、

$$P_{EM} = \frac{V^2}{R}, \quad (18)$$

$$= \frac{V^2 S}{l \rho}, \quad (19)$$

$$= \frac{1 \times (0.5 \times 10^{-3})^2}{0.1 \times 1.72 \times 10^{-8}}, \quad (20)$$

$$= 4.6 \times 10^2 (\text{Watt}), \quad (21)$$

となり、圧倒的に電磁エネルギーの移送量の方が多ことがわかった。

ここで、電力の計算に回路理論からの式を用いたが、このことの意味については後に一章を設けて説明する。

蛇足ながら、半導体内部でのデバイスシミュレーションにおいて、電子やホール輸送方程式が考慮され、その荷電粒子の運動による電流が重要となってくるが、ミクロン単位の間隙に数ボルトの電圧が印加されている状況は、このような回路での場合での電場の強さと全く異なるからである。

5 導線がペア構造である必要性について

Maxwell-Ampere の式の両辺に $\nabla \cdot$ を掛けると、

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \right) = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = 0, \quad (22)$$

となる。

ここで、磁力線という概念がある。磁場ベクトルを流体の速度ベクトルと同様に扱い、流線との類似概念として定義されたものである。磁場の発散は零であるため、磁力線は途中で他の磁力線と交わったり、消えたりはしない。

ここで新たに、

$$\mathbf{J}_T = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}, \quad (23)$$

という電流、ここでは全電流としよう、を定義すると、この変位電流と電流を合わせた全電流も磁力線と同様に途中で他の磁力線と交わったり、消えたりしない事になる。

ここで配線について考えてみる。その役割は電気信号を伝えるという事が最も重要な事であるが、近年問題として指摘されている配線からの他の配線やデバイスへの電気干渉問題を鑑みると、配線近傍付近に電磁場をできるだけ封じて他への影響をなるべく小さくしたいと言う要求がある。

この電気干渉問題の原因は、変位電流が遠方まで伝わりそこで問題となる事が大きな要因となっている。そのためこの干渉を小さくするためには変位電流をなるべく局所的に封じ込める事がひ

つようとなる。この時、実電流が流れる部分、つまり導線が一つだけであると、変位電流が広がって他の回路部分、デバイス部分に干渉する可能性が高くなる。そこで、導線を複数用意してその間に変位電流を封じ込め、エネルギー流（具体的には Poynting 束）を封じ込める事が効果的である事は容易に想像できる。複数の導線が電磁干渉問題を低減する重要なポイントである事がわかるだろう。

全電流線は閉じているわけであるから、2つの導線がありその間を電磁波が伝播する時、導線には逆方向に電流が流れる事になる。この事は、いわゆるディファレンシャル電流が電磁放射を起こしづらいと言われている事と矛盾しない。また、対となる導線部分で電流が逆向きでない場合、変位電流が別の部分へと伸びているはずであり、この事は他の回路部分との干渉を意味する。エネルギー流も導線の間集中する事無く、導線の外側に存在する事となり、干渉は自明となる。このことも、コモン電流で言われている事と矛盾しない。

ただし、配線上を流れている電流のみを見て、反対方向に流れているから問題なしとするには性急で、その電流がその配線間に存在する変位電流によって閉じているかどうか重要である。

6 電力の式と Poynting 束

図5にあるような2つの完全導体の導線が平行に並んでいる系で、その導線に沿って TEM モードで電磁波が伝播しているとする。この時、TEM モードであるため、その断面内では静電場として扱える。このような状況のときでのこの横断面を通過する単位時間あたりの電磁エネルギー量 P は、

$$P_z = \int (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}, \quad (24)$$

で与えられ、また

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi, \quad (25)$$

である。従って、

$$\begin{aligned} P_z &= \int_S (-\nabla\phi \times \mathbf{H}) dS, \\ &= \int_S \phi \nabla \times \mathbf{H} - \nabla \times (\phi \mathbf{H}) dS, \\ &= \int_S \phi \mathbf{J} dS - \oint_l \phi \mathbf{H} dl, \end{aligned}$$

ここで、積分空間には電流は存在しないので右辺第一項は消去される。よって次式を得る。

$$P_z = - \oint \phi \mathbf{H} dl, \quad (26)$$

図5に示された積分経路において、導体周りの積分の寄与は、

$$\phi = V,$$

の部分だけが残る、外円の部分の寄与は外円の半径が無限遠の時、 $\phi = 0$ であるから消えてしまう。つまり、

$$P_z = V \left[- \oint_{l_1} \mathbf{H} dl \right],$$

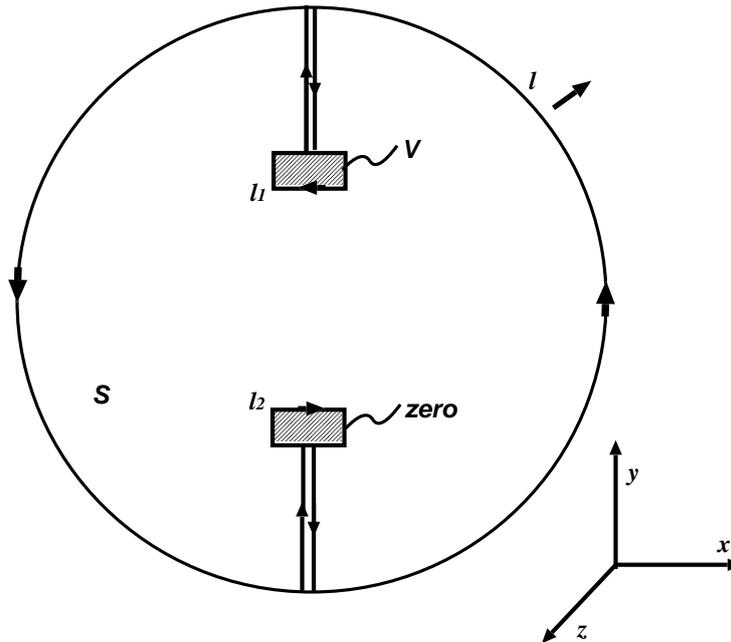


図 5: 2つの導線にTEMモードの電磁波が伝播しているときの導線の横断面図と電力を求めるための積分経路

を得る。この時、

$$I = \int \mathbf{J} dS = \int \nabla \times \mathbf{H} dS = - \oint_{l_1} \mathbf{H} dl,$$

であるから、

$$P = VI,$$

を得る。これは回路における電力の式と一致する。

この結果は、TEMモードであるとして得たものであるので、すべての周波数において成り立つ。厳密には高周波数になると線路がアンテナとなり直接電磁放射が起きるので複雑となるが、低周波から直流まで同様に成り立つのである。

この結果を得たという事は、Maxwell方程式の解と回路理論での式とはTEMモード条件下において等価であるという事を示している。もちろん、今回仮定としたTEMモードから外れるようなモードが伝播している場合などでは結果は全く異なる事になる。

7 まとめ

電子回路における物理的描像として電流が電磁エネルギーを運ぶというものは間違いで、実際にエネルギーを運んでいるのは「場」であり、Ohm電流は電磁エネルギーを熱エネルギーに変換するのに寄与するのみで、エネルギー輸送には寄与はほとんどない事が示された。また、2つの導体線路に挟まれたTEMモードで伝播している系、一般的な直流回路から1GHz程度以下の回路ではほとんどこの仮定が成り立つ、において、電磁エネルギーを輸送するPoynting束を面積分する事によって、回路理論における電力と電圧、電流の関係式が求める事ができる事が示された。

Maxwell 方程式より導きだされる物理的描像から得られる電圧と電力の関係式が、回路理論で用いられている式と矛盾無く導出される事から、回路理論はTEMモード仮定や静的な場合に成り立つ式である事、この仮定が成り立たない電磁放射やクロストークなどの問題を扱うためには、系の支配方程式として Maxwell 方程式を用いなければならず、場の概念で持って取り扱わなければならない事が示された。

また、そのとき注意しなければならない事として、マイクロストリップ線路のように構造が開放された配線ではペアでなければ変位電流が遠方まで伸びて電磁干渉を招く事、また、電磁エネルギーはペア導線の間を伝わるため、その部分に干渉を招くような構造、例えば別の配線やプレーンを配置するなど、は避けるようにしなければならない事が示された。

参考文献

- [1] Hiroshi Matsumoto and Tetsuya Sato. *Computer Simulation of Space Plasmas*. Advances in earth and planetary sciences. Terra Scientific Publishing Company, 1985.
- [2] 砂川重信. 理論電磁気学. 紀伊國屋書店, 第2版, 1973.

COPYRIGHTS - 2006, All Right Reserved by 阿部博史